ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ К КЛАССИФИКАЦИИ РАСПАДАЮЩИХСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Борисов Иван Михайлович
аспирант кафедры фундаментальной математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, г. Нижний Новгород. i.m.borisov@mail.ru

Полотовский Григорий Михайлович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, г. Нижний Новгород. polotovsky@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается применение метода Оревкова, основанного на теории узлов и зацеплений, к классификации вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых при выполнении некоторых условий максимальности и общего положения. В частности, рассматриваются некоторые классы распадающихся кривых степеней 7 и 8.

Ключевые слова: вещественные алгебраические кривые, распадающиеся алгебраические кривые, метод Оревкова.

APPLICATION OF THE THEORY OF KNOTS AND LINKS TO THE CLASSIFICATION OF THE DECOMPOSABLE ALGEBRAIC CURVES

Borisov Ivan Michailovich
Postgraduate at the Department of Fundamental mathematics
National Research University Higher School of Economics,
Russia, Nizhny Novgorod. i.m.borisov@mail.ru

Polotovskiy Grigory Michailovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Fundamental mathematics
National Research University Higher School of Economics,
Russia, Nizhny Novgorod. polotovsky@gmail.com

Annotation: The work is devoted to the application of the Orevkov method, based on the theory of knots and links, to the classification of real algebraic curves, which decompose into the product of two nonsingular curves under some conditions of maximality and general position. In particular, some classes of decomposable curves of the 7 and 8 degree are considered.
Keywords: real algebraic curves, real decomposable algebraic curves, Orevkov’s method

Изучение вещественных алгебраических кривых берёт своё начало фактически у истоков математики, в Древней Греции, а задача топологической классификации таких кривых особую известность и современную формулировку приобрела после включения её Давидом Гильбертом в его известный список математических проблем под номером 16. Гильберт, столкнувшись, с первым нетривиальным случаем, кривыми степени 6, поставил задачу классификации кривых шестой степени, которая была решена лишь спустя 69 лет Дмитрием Андреевичем Гудковым (см. [1]). Сейчас известна классификации кривых степени 7, а для кривых степени 8 есть открытые вопросы. После результатов Гудкова интерес к этой тематике резко возрос и появился ряд сопутствующих ей задач, одна из которых была сформулирована Гудковым как задача топологической классификации вещественных алгебраических кривых степени 6, распадающихся в произведение двух неособых кривых при некоторых естественных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей (была решена вторым из авторов настоящей работы в [2]). На данный момент известна классификации распадающихся кривых до степени 6 включительно, есть открытые вопросы для кривых степени 7.

Определение 1. Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.

Определение 2. Множество $RC_m\,(CC_m)$ точек $(x$¿¿$0 : x_1 : x_2)((z_0 : z_1 : z_2))$¿ вещественной (комплексной) проективной плоскости $RP^2(CP^2)$, удовлетворяющих уравнению $C_m(x_0, x_1, x_2) = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m.

Определение 3. Кривая C_mназывается неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в CP^2).

Теорема (Харнак, 1876). Пусть N – число компонент связности RC_m. Тогда

$N \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, причём эта оценка точна для любого m.

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом ветвей называются *M*-кривыми.

Будем считать, что для рассматриваемых распадающихся кривых C_m выполняются следующие условия:

1.$C_m = C_{m-k} C_k,\, k \in \{1,2,\ldots,[\frac{m}{2}]\}$
2.C_{m-k} и C_k являются *M*-кривыми,
3. C_{m-k} и C_k пересекаются в $(m-k)\cdot k$ действительных точках без касания,
4. Все точки пересечения лежат на одной ветви кривой $C_{m-k}u$ на одной ветви кривой C_k,
5. Точки пересечения лежат на пересекающихся ветвях в одном порядке.

Задача топологической классификации распадающихся кривых степени m обычно формулируется как задача классификации с точностью до изоморфизма троек (RP^2, RC_m, RC_k), где $C_m(x_0, x_1, x_2) = C_k(x_0, x_1, x_2) \cdot C_{m-k}(x_0, x_1, x_2)$.

Для того, чтобы применить метод Оревкова (подробнее см. [4], [5]), нужно выбрать схемы, для которых существует максимальный пучок, то есть в RP^2 есть точка p такая, что любая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекает исследуемую схему кривой степени m не менее, чем в $m-2$точках, и существует прямая, пересекающая схему в m точках. Идея метода заключается в том, чтобы сначала получить для кривой C_m соответствующую ей косу из m нитей, рассматривая в комплексной проективной плоскости CP^2 расположение пучка комплексных прямых CL_p с центром в точке p относительно CC_m и устраняя двойные точки множества $CC_m \cap Cl_p$, а затем использовать известный факт (см. [3]): если схема реализуется вещественной алгебраической кривой, то соответствующая ей коса квазиположительна. Неравенство Мурасуги-Тристрама и условие Фокса-Милнора – необходимые условия квазиположительности косы. Поэтому, если хотя бы одно из них не выполняется, то схема не реализуется вещественной алгебраической кривой.

В нашей работе метод Оревкова применялся к распадающимся кривым степеней 7 и 8. Этим методом были запрещены 11 схем расположений двух коник и кубики таких, что коники пересекаются друг с другом в четырёх точках, а нечётная ветвь кубики пересекает каждую из коник в шести точках. Также рассматривались распадающиеся кривые степени 8 с сомножителями степеней 2 и 6. Было доказано, что из 250 допустимых расположений, 230 не реализуются вещественными алгебраическими кривыми рассматриваемого класса. 6 из оставшихся схем реализуются методом Гильберта (метод Гильберта изложен, например, в [1]). Для остальных 14 схем вопрос о реализуемости вещественными алгебраическими кривыми указанного вида остаётся открытым.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гудков Д.А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. – 1974 – Т.29, №4, С. 3-79.
2. Полотовский Г.М. Полная классификация *M*-распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости // Деп. В ВИНИТИ. – 1978, С 1-103.
3. Lee Rudolf Algebraic functions and closed braids // Topology. – 1983, №22, P. 191-202.
4. Orevkov S.Yu. Classification flexible *M*-curves of degree 8 up to isotopy // Geom. Funct. Anal. – 2002, №12, P. 723-755.
5. Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. – 1999, №38, P.779-810.